Version 2 mit ein paar Korrekturen und Ergänzungen (25.2.2008)

MIA, MIIA, MIII – Programm zum Ferientutorium

März 2008

Dieser Text skizziert das Programm, das man im Rahmen einer kompletten Wiederholung der drei Analysisvorlesungen abarbeiten möchte. Und er liefert vorweg ein Vortragsprogramm mit dem das eigentliche Programm exemplarisch behandelt werden kann.

Vortragsprogramm

Das Vortragsprogramm besteht aus einer Liste von mehr als 40 Vortragsthemen, die im Folgenden meist als Frage formuliert sind und die gelegentlich einen kurzen Hinweis haben. Die Vortragsthemen sind jeweils in Kurzvorträgen von 10-15 Minuten mit Beweisen oder Beweisskizzen abzuhandeln und sollen zu Fragen und zu Diskussionen anregen.

In den Vorträgen sollen die behandelten Begriffe und Aussagen immer auch sehr genau beschrieben werden. Die Fragen sollen entsprechend präzisiert werden, sie sind teilweise unvollständig formuliert. Und natürlich soll die Antwort deutlich mehr als ein „Ja“ oder ein „Nein“ umfassen: Bei der Antwort fängt der Vortrag erst an.

Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer sollte mindestens 2 Vorträge halten.

A

1. Warum konvergiert die Folge $(\frac{1}{n+1})$? Warum hat $x^2 - 2 = 0$ eine Lösung in $\mathbb{R}$ aber nicht in $\mathbb{Q}$?

   Es geht um Grundlegendes.

2. Warum hat $x^2 + 2 = 0$ in $\mathbb{C}$ eine Lösung, nicht aber in $\mathbb{R}$? Wie kann ich $\mathbb{C}$ anordnen?

   Die 2. Frage muss präzisiert werden durch Festlegung, in welcher Beziehung die Anordnung zu den Rechenoperationen steht. Und vielleicht sollte vorweg diskutiert werden, was überhaupt eine Ordnung auf einer Menge ist und eine partielle Ordnung. Wohlordnung?

3. Man gebe zwei Beweise des Zwischenwertsatzes:

   Einen durch $\sup\{x : f(x) \leq \eta\} = \xi$*, den anderen durch iterierte Halbierung des Intervalls.*

4. Was sind die Rechenregeln für konvergente Folgen?

   Ausführlicher Beweis mindestens für einen Fall.

5. Kennen Sie alle Rechenregeln für stetige und für (stetig) differenzierbare Funktionen und Abbildungen?

   Wie lauten Sie? Und was ist ihre Beziehung zur vorangegangenen Frage?

6. Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?

   Präzise Formulierung! Auch Reihen in $\mathbb{R}^m$ oder in Banachräumen.

7. Warum ist eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall beschränkt?

   Ziemlich grundlegend wieder. In metrischen Räumen? Auch richtig für beschränkte Intervalle? Was ist ein Intervall?

8. Warum ist die Exponentialfunktion stetig, warum ist sie differenzierbar?

   Zunächst gilt es, die Funktion zu definieren.

9. Wie zeigt man $\exp(z + w) = \exp z \exp w$ für $z, w \in \mathbb{C}$? Geht das auch für quadratische Matrizen?

   Zu Frage 2: Was ist $\exp T$ für eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$?

10. Warum ist x^{122} beliebig oft differenzierbar? Hat diese Funktion ein Minimum?

B

1. Partielle Integration und Hauptsatz. Gibt es einen Zusammenhang?

2. Ist eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung bereits gleichmäßig stetig?

   Auch in mehreren Variablen.

3. Kennen Sie den Satz von Heine-Borel, oder den Satz von Bolzano-Weierstrass?

   Es geht um die Namen, und die Inhalte der Sätze. Im Falle von Intervallen, in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{R}^n$ und gegebenenfalls in allgemeineren Räumen. Im Hintergrund steht der Begriff der Kompaktheit, siehe nächste Frage.

4. Kennen Sie drei verschiedene aber äquivalente Formulierungen für kompakt?

   Man beschränke sich auf metrische Räume oder Teilmengen von Banachräumen. Beweis der Äquivalenz, zumindestens teilweise!

5. Kennen Sie drei verschiedene aber äquivalente Bedingungen für Stetigkeit?

   In metrischen Räumen. Beweis der Äquivalenz, ist hier nur Einsetzen der Begriffe.

6. Was ist der Zusammenhang zwischen Zwischenwertsatz und Zusammenhang?

   Ha!

7. Warum ist eine lineare Abbildung immer auch stetig?

   Oder stimmt das gar nicht? Wie steht es mit der Differenzierbarkeit? Was ist eine lineare Abbildung, in welchen Räumen spielt sich das alles ab?

8. Partiell differenzierbare Funktionen sind immer auch total differenzierbar, oder?

9. Wie bestimmt man den Konvergenzradius von konvergenten Potenzreihen?

   Auch in mehreren Variablen.

C

1. Unter welchen Bedingungen an eine differenzierbare Funktion f hat f in a mit $Df(a) = 0$ eine lokales Maximum oder ein lokales Minimum?
   Es geht auch um den mehrdimensionalen Fall.
2. Was bedeutet „Extrema unter Nebenbedingungen"?
   Satz und Beispiel.
3. Wo tauchen die Begriffe Weglänge und Krümmung auf?
   Eine kurze Einführung in die Geometrie der Kurven.
4. Hat ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^3$ auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{rot}F = 0$ stets ein Potential?
   Potentialfelder und wegunabhängige Integration längs eines stetigen Vektorfeldes. Gibt die Frage oder eine Variante dazu auch Sinn in anderen Dimensionen?
5. Ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf stetige Funktionen bzw. auf die Dimension 1 beschränkt?
   Natürlich nicht. Oder doch? Begründungen und Varianten.
6. Was hat der Satz von Taylor mit konvergenten Potenzreihen zu tun?
   In einer und in mehreren Variablen.
7. Was ist eine Riemannsche Summe, oder eine Riemann-Stieltjes Summe?
   Die ganze Thematik der Integration in einer Variablen vor der Kenntnis des Lebesgue-Integrals. Aber das Lebesgue-Integral leuchtet im Hintergrund.
8. Ist eine punktweise konvergente Folge von Riemannintegrierbaren Funktionen wieder Riemann integrierbar? Hilft es, wenn die Folge monoton ist?
   Definition! Und am Ende gegebenenfalls der Vergleich mit Lebesgueintegrierbaren Funktionen.
9. Ist das Bild einer kompakten und zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung stets wieder kompakt und zusammenhängend?
   Erst einmal ordentlich formulieren! Und dann beweisen.

D

1. Varianten des Mittelwertsatzes!
   Auch in Integralform!
2. Unter welchen Bedingungen hat eine gleichmäßig konvergente Folge stetig differenzierbarer Funktionen einen differenzierbaren Grenzwert?
   Als Standard wird da stets eine hinreichende Bedingung genannt. Beweisidee! Anwendung auf Potenzreihen.
3. Was bedeuten „von beschränkter Variation" und „rektifizierbar" und was hat der Mittelwertsatz damit zu tun?
   Wegintegration.
4. Kennen Sie Banachräume?
   Nach der Definition und Abgrenzung gegen normierte Räume, Hilberträume, metrische Räume kommen Beispiele. Vor allem auch in unendlicher Dimension. Evtl. sogar die L^p-Räume.

5. Der Beweis des Fixpunktsatzes von Banach ist vorzuführen.

   Im Falle von metrischen Räumen. Es geht darum jede einzelne Voraussetzung auf ihre Notwendigkeit zu prüfen. $M \neq \emptyset$ *wird fast immer vergessen. Und die Vollständigkeit?*

6. Wie lassen sich die beiden Sätze „Umkehrsatz“ und „Satz über implizite Abbildungen“ direkt auseinander herleiten?

   Es geht nicht zuletzt um eine saubere Formulierung der Sätze, evtl. auch im Fall von Banachräumen.

7. Warum induziert das elementargeometrische Volumen der Quader im $\mathbb{R}^n$ auf dem System der endlichen Vereinigungen von Quadern ein Prämaß? Ist das System eine Mengenalgebra?

8. Was ist die Beziehung zwischen dem Wegintegral (MIIA) längs eines stückweise differenzierbaren Weges und dem Integral einer Differentialform vom Grad auf einer 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

   Präzisierung der Definitionen.

E

1. Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{m+k}$ gebe es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{m+k}$ und eine Familie $(g_j^U)_{j\in I_U}$ von stetig differenzierbaren Funktionen $g_j^U : U \to \mathbb{R}$ mit

   $$U \cap M = \bigcap_{j\in I_U} (g_j^U)^{-1}(0)\,.$$

   Unter welchen Bedingungen ist M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension k?

   Es geht um hinreichende Bedingungen, aber am besten mehr als eine. Etwa auch dann, wenn die Mächtigkeit von I_U *für verschiedene* U *unterschiedlich ist.*

2. Es sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche der Form $H = g^{-1}(0)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in H$ erfüllt. Wie sehen das Tangentialbündel und das Normalenbündel von H aus?

   Es geht um die konkrete Beschreibung mit Hilfe von g*. Wenn die Zeit reicht: Wie sieht die konkrete Beschreibung aus, wenn die Hyperfläche / die Untermannigfaltigkeit anders gegeben ist, z.B. als Graph, bzw- durch Parametrisierungen oder durch Karten?*

3. Was trennt Messräume von Maßräume?

   Nach der Klärung der Begriffe: Beispiele. Insbesondere die Borelalgebra.

4. Was unterscheidet und was verbindet die Sätze von Fubini and den Satz über das Cavalieriprinzip?

5. Wie lauten die beiden wichtigsten Konvergenzsätze der Integrationstheorie?

   Darstellung der beiden Sätze inklusive ualitativer Beweise und verständlicher Beispiele.

6. Welche Bedeutung hat der Begriff σ-endlich?
   Nicht nur definieren. Sondern erläutern, wo der Begriff in welcher Weise zum Tragen kommt.
7. Das euklidische Lebesgueintegral ist invariant. In welchem Sinne?
8. Der Satz von Stokes. Welche elementaren Formulierungen gibt es?
   In der Dimension $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$. *Und welche nicht elemenaren?*

Programm

Die Blöcke entsprechen in etwa jeweils einem Vormittag bzw. einem Nachmittag

I. Topologische Grundbegriffe

1. Metrische Räume, insbesondere offene Mengen; Beweis, dass offene Kugeln offen sind; Offene Mengen bilden eine Topologie.

2. Definition abgeschlossen, Umgebung, Hülle, Inneres, ...

3. Konvergenz: Definition mit Umgebungen, Definition mit Metrik, Beweis der Äquivalenz. $1/n \to 0$

4. Topologie und Metrik in R^n

5. Rechenregeln für Grenzwerte dort

6. Vollständigkeit, Begriff und der Fall $\mathbb{R}^n$

II. Reihen

1. Definition konvergente Reihe, Kriterium für alternierende Reihen, harmonische Reihe

2. Cauchykriterium, Majorantenkriterium, geometrische Reihe

3. Absolute Konvergenz als Verschärfung der Konvergenz, Unabhängigkeit des Wertes der absolut konvergenten Reihe von der Reihenfolge

5. Quotientenkriterium, Wurzelkriterium

5. Produkt von Reihen

6. Konvergenzradius von Potenzreihen

7. Reihen in $\mathbb{R}^n$ und in Banachräumen

III. Stetigkeit, elementar

1. Definition von Stetigkeit in verschiedenen äquivalenten Formulierungen

2. Permanenzsätze ($f + g$ stetig, wenn f, g stetig, etc.), Stetigkeit elementarer Funktionen

3. Zwischenwertsatz und der zugehörige Fixpunktsatz

4. Kompaktheit, Satz von Bolzano-Weierstrass

5. Maximumprinzip

6. Gleichmäßige Stetigkeit, stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig, für beliebige metrische Räume

7. Lipschitzstetige Abbildungen sind gleichmäßig stetig

IV. Stetigkeit, Banachräume

1. Punktweise, gleichmäßige Konvergenz; gleichmäßige Limites stetiger Funktionen sind stetig. Beispiel, dass punktweise Konvergenz nicht ausreicht.

2. Definition Banachraum, Topologie darauf, Äquivalenz von Normen, Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind alle äquivalent.

3. Raum der stetigen Funktionen als Banachraum.

4. Banachscher Fixpunktsatz

5. Stetigkeit von Potenzreihen

6. Exponentialfunktion, auch auf dem Raum der Matrizen oder der stetigen Endomorphismen eines Banachraumes

7. Kompaktheit in metrischen Räumen

V. Differentialrechnung in eine Veränderlichen

1. Definition $f : I \to \mathbb{R}$, Beispiel x^n

2. Rechenregeln

3. Mittelwertsatz, Schrankensatz

4. Kriterien für Monotonie, Extrema

5. Verallgemeinerter Mittelwertsatz, l'Hopital

6. Differenzierbarkeit für Grenzwerte von Funktionen

VI. Differentialrechnung in eine Veränderlichen, höhere Ableitungen

1. Höhere Ableitungen, stetig differenzierbar ist mehr als differenzierbar.

2. Extrema unter Verwendung der zweiten Ableitung

3. Satz von Taylor

4. Konvexität

5. Höldersche Ungleichungen

VII. Differentiation in mehreren Veränderlichen

1. Partielle Differenzierbarkeit

2. Totale Differenzierbarkeit

3. Stetigkeit der (partiellen) Ableitungen und Folgerungen

4. Satz von Schwarz

5. Extrema und Ableitungen

6. Satz von Taylor

7. Konvergente Potenzreihen in mehreren Variablen

8. Umkehrsatz, Satz über implizite Abbildungen

VIII. Untermannigfaltigkeiten
1. Definition und Beispiele
2. Die verschiedenen Formulierungen
3. Karten, Parametrisierungen
4. Tangentialvektoren, Tangentialbündel
5. Extrema unter Nebenbedingungen
6. Differenzierbarkeit auf Untermannigfaltigkeiten
7. Vektorfelder

IX. Wegintegration
1. Riemann-Integral und Hauptsatz
2. Wegintegration längs Vektorfeldern, Riemann-Stieltjes
3. Potentialfelder und ihre Charakterisierung
4. Die Integrabilitätsbedingung (im Falle $n = 3$: $\mathrm{rot} F = 0$)
5. Weglänge
6. Krümmung
7. Geodätische
8. Integration als stetige, lineare Operation

X. Integration im $\mathbb{R}^n$
1. Messraum
2. Maßraum
3. Fortsetzungssatz von Hahn
4. Das elementargeometrische Volumen des $\mathbb{R}^n$ als Prämaß
5. Konvergenzssätze
6. Das Lebesgue-Integral, Satz von Fubini
7. Integration auf Untermannigfaltigkeiten
8. Satz von Stokes (elementar)
9. Satz von Stokes für Differentialformen